page 162 ECOLES de TRAVAUX PUBLICS: T.P.E. 1987 Math 2

MINISTERE DE L'EQUIPEMENT,
DU LOGEMENT, DE L'AMENAGEMENT DU TERRITOIRE
ET DES TRANSPORTS

E.I.T.P.E 1987

- OPTION M -

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(temps accordé : 4 heures)

Pour tout entier naturel n, on désigne par E_n l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle, périodiques de période 2π et n fois continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ (continues pour $n = 0$).

Dans tout le problème, on désigne d'autre part par U l'application qui à toute fonction f de E_0 associe la fonction $F = U(f)$ définie comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ F(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \sin\left(\frac{x-t}{2}\right) \right| f(t)\, dt$$

PARTIE I

I.1 a) Montrer que E_n muni de l'application $f \longrightarrow \|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ constitue un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que U est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé E_0 dans lui-même.

c) Calculer la norme de U. (On rappelle que la norme d'une application linéaire continue U est définie par : $\|U\| = \sup_{\|f\|\leq 1} \|U(f)\|$)

I.2 Soit f un élément de E_0 et $F = U(f)$

a) Montrer que pour tout réel x, $F(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) A(x) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) B(x)$

où $A(x) = \int_{x-2\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) f(t)dt$ et $B(x) = \int_{x-2\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) f(t)dt$

b) Montrer que F est dans E_2 et en déduire que U n'est pas surjective de E_0 sur E_0.

c) Démontrer que F est solution de l'équation différentielle suivante que l'on appellera (E) .

$$(E) : F'' + \frac{F}{4} = f$$

De quel type est cette équation ?

I.3 a) Démontrer que U commute avec la dérivation sur E_1, c'est à dire que :

$$\forall g \in E_1\ ,\ U(g') = [U(g)]'$$

b) Démontrer que étant donné une fonction h de E_2, l'image par U de $h'' + \frac{h}{4}$ est h.

c) Démontrer que U est un isomorphisme de E_0 sur E_2.

PARTIE II

On se propose de déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de U.

II.1 Démontrer que si λ est une valeur propre non nulle de U alors f est un vecteur propre associé à λ si et seulement si f est une solution non nulle du problème suivant que l'on appellera (P) :

$$\begin{cases} f \in E_2 \\ f'' + \dfrac{\lambda-4}{4\lambda} f = 0 \end{cases}$$

Tournez la page S. V. P.

II.2 Résoudre le problème (P). On montrera en particulier qu'il n'admet des solutions non nulles que si λ a l'une des valeurs suivantes :

$$\lambda_n = \frac{-1}{n^2 - \frac{1}{4}} \qquad n \in \mathbb{N}$$

II.3 Pour chacune des valeurs propres λ de U, déterminer une base du sous-espace propre associé $E(\lambda)$.

PARTIE III

On considère les suites (a_n) et (b_n), $n \in \mathbb{N}$, d'applications de E_0 dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \qquad b_0(f) = 0$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

III.1 a) Prouver que pour tout entier naturel n, a_n et b_n sont des formes linéaires continues sur l'espace vectoriel normé E_0.

b) Calculer les normes de a_n et de b_n. (On rappelle que la norme d'une forme linéaire ℓ continue est définie par :

$$\|\ell\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\ell(f)|\ )$$

c) Trouver des relations simples entre a_n et $a_n \circ U$ d'une part, et entre b_n et $b_n \circ U$ d'autre part.

d) Démontrer que $\| a_n \circ U \| \leq \| a_n \| . \| U \|$, et discuter les cas d'égalité suivant la valeur de n.

III.2 Calculer les valeurs de $a_n(f)$ et $b_n(f)$ lorsque f est la fonction $x \longrightarrow \cos(px)$ et lorsque f est la fonction $x \longrightarrow \sin(px)$, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

III.3 On considère la fonction $f_0 : x \longrightarrow \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$

a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les valeurs de $a_n(f_0)$ et de $b_n(f_0)$.

b) Démontrer que la série de fonctions de terme général $x \longrightarrow a_n(f_0)\cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, est uniformément convergente, et que sa somme φ_0 est une fonction de E_0.

c) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n(\varphi_0) = a_n(f_0)$ et $b_n(\varphi_0) = b_n(f_0)$.

On admettra sans démonstration pour la suite du problème que $\varphi_0 = f_0$.

Tournez la page S. V. P.

ECOLES de TRAVAUX PUBLICS: T.P.E.
Math 2
page 163
1987

III.4 Démontrer que pour toute fonction f de E_0, la série de fonctions de terme général

$$x \longrightarrow \frac{-1}{n^2 - \frac{1}{4}} [a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)]$$

$n \in \mathbb{N}$, converge uniformément et que sa somme est égale à U (f).

(on pourra considérer une expression de U (f) utilisant f_0).

III.5 a) Prouver enfin, à partir des résultats des parties I,II et III que pour toute fonction f de E_2, la série de terme général :

$$x \longrightarrow [a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)] \ , \ n \in \mathbb{N}$$

converge uniformément et que sa somme est égale à f.

b) En s'appuyant sur un théorème que l'on énoncera, indiquer une hypothèse complémentaire permettant d'affirmer que la somme de la série définie au a) est égale à f lorsque f est dans E_0 mais pas nécessairement dans E_1.

PARTIE IV : Application de résultats de la partie III.

IV.1 Montrer qu'il existe une fonction unique f dans E_0 coïncidant avec la fonction $x \longrightarrow x^2$ sur $]-\pi, \pi[$

IV.2 Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les valeurs de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$.

IV.3 Démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

IV.4 Démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - \frac{1}{4})} = 8 - \frac{2\pi^2}{3}$

• • •

page 164 ECOLES de TRAVAUX PUBLICS: T.P.E. 1987 Math 2